Problemas de posición y de magnitud

Unidad 3

*Paralelismo entre rectas, entre planos y entre rectas y planos. Perpendicularidad entre rectas, entre planos y entre rectas y planos. Coplanaridad de rectas. Intersección de recta y plano, de planos y de rectas. Ángulo entre planos, entre rectas y entre recta y plano Distancia de un punto a un plano. Distancia entre dos planos paralelos. Distancia de un punto a una recta. Distancia entre dos rectas paralelas. Distancia entre dos rectas alabeadas.*

**Paralelismo entre rectas**

Sean  // y //



Las rectas paralelas pueden no tener ningún punto en común o ser coincidentes.

Ejemplo:

los vectores son paralelos, entonces las rectas son paralelas ¿son coincidentes?

P (1 , 2 , 0 ) ¿?

Entonces las rectas son paralelas no coincidentes.

**Paralelismo entre planos**

Sean ⊥ ⊥

|  |  |
| --- | --- |
|  | Dos planos son paralelos si y sólo si los vectores perpendiculares a ellos también lo son.  **// ⇔** |

Ejemplo:

//

y = 1 z = 2 x +1 -2 + 3 = 0 x = -2 A(-2 , 1 , 2)

-4 ≠ 0 son planos paralelos no coincidentes

**Paralelismo entre rectas y planos**

Sean ⊥ //

|  |  |
| --- | --- |
|  | Una recta y un plano son paralelos si y sólo si sus vectores directores son perpendiculares.  **π // r ⇔**  ⊥ ⇔ . = 0  ⇔ + |

**π : x + y – 2z + 3 = 0**

**CA**

**a1 + b 3 + c 2 = 0 a = 1 b = 1 c = -2**

1 . 1 + 3 . 1 + 2 (-2) = 0

0 = 0

Los vectores son perpendiculares, entonces el plano y la recta son paralelos.

Para averiguar si la recta está contenida en el plano se hace:

Se toma un punto de la recta y se analiza si verifica la ecuación del plano.

P(2 , 1 , -2) ∈ r **π : 2 + 1 – 2 (-2) + 3 = 0**

**10 ≠ 0 la recta no está contenida en el plano**

**Perpendicularidad entre rectas**

Sean  // y //

|  |  |
| --- | --- |
|  | Dos rectas son perpendiculares si y sólo si sus vectores directores son perpendiculares.  ⊥ ⇔ ⊥ ⇔ . = 0  ⇔ + |

**Perpendicularidad entre planos**

Sean  ⊥ y ⊥

|  |  |
| --- | --- |
|  | Dos planos son perpendiculares si y sólo si los vectores perpendiculares a ellos son a la vez perpendiculares entre sí.  ⊥ ⇔ ⊥ ⇔ . = 0  ⇔ + |

**Perpendicularidad entre rectas y planos**

Sean ⊥ //

|  |  |
| --- | --- |
|  | Una recta y un plano son perpendiculares si y sólo si sus vectores directores son paralelos.  r ⊥ π ⇔ //  **⇔** |

Ejemplo 1: Analice las posiciones relativas entre:

, , π : x - 2y + 3z + 1 = 0 , α : 4x + y + z -5 = 0

Posiciones relativas entre r y π:

// r: = (3 , -2 , 5) y ⊥ π : = (1 , -2 , 3)

r // π: ¿ ⊥ ? . = 3 x 1 + (-2) (-2) + 5 x 3 = 22 ≠ 0 ⇒ y no son perpendiculares ⇒ la recta r no es paralela al plano π.

r ⊥ π: ¿ // ? ⇒ los vectores no son paralelos ⇒ la recta y el plano no son perpendiculares.

**Coplanaridad de rectas**

Dos rectas en el espacio pueden estar o no en un mismo plano.

Si dos rectas están en el mismo plano se llaman **coplanares**. En caso contrario, se llaman rectas **alabeadas**.

Si **dos rectas son paralelas**, determinan un plano que las contiene. Rectas **paralelas son coplanares**.

Si las rectas no son paralelas, serán coplanares si se verifica que:

Dadas dos rectas , sus vectores asociados y , respectivamente. Los puntos fijos ∈ y ∈ , determinan un vector .

Para que los tres vectores estén en un mismo plano, se debe cumplir que el producto mixto de los mismos sea nulo. O sea, no existe el paralelepípedo formado a partir de los tres vectores.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Las rectas son coplanares si y solo si:  . ( x ) = 0 |

Ejemplo 2: Dadas las rectas, y

Verifique si son coplanares.

= P1( 1 , 5 , -2) = (1 , 2 , -6) P2 (-7 , 4 , 1) = (-8 , -1 , 3)

= (6 - 6) 2 – (3 – 48) (-1) + (-1 +16) 3 = 0 ⇒ l y s son coplanares

**Intersección de recta y plano**

Sea π un plano con normal y r una recta dirigida por . Si ≠ 0 (plano y recta no son paralelos), π y r tienen un solo punto en común, P = π ∩ r. Sean las ecuaciones de plano y recta:

|  |  |
| --- | --- |
|  | π : a x + by + c z + d = 0  λ ∈ R  Para hallar las coordenadas del punto P, se resuelve la ecuación en λ:  a () + b () + c () + d = 0 |

Observación: Si la recta y el plano son paralelos coincidentes, entonces la intersección de la recta y el plano dan la misma recta con la que se está trabajando.

Ejemplo 3: De existir, halle la intersección entre

y π : x - 2y + 3z + 1 = 0

= (3 , -2 ,5) = (1 , -2 , 3) . = 22 ≠ 0 r y π no son paralelos. Se intersectan en un punto.

– 2() + 3() + 1 = 0

2 + 3t + 2 + 4t + 3 +15 t +1 = 0

22 t = - 8

t = - 4/11

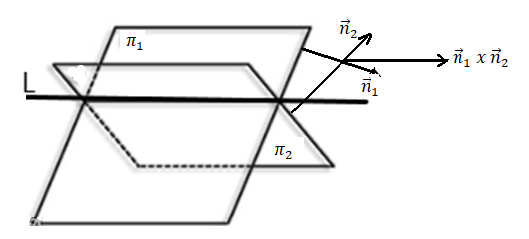
x =

r ∩ π = P ( , , )

**Intersección de planos**

Sean  ⊥ y ⊥ ( y no son paralelos)

y



La recta L es a intersección de los planos y , L = ∩ .

El que dirige a la recta L es paralelo a los dos planos, y , por lo tanto es perpendicular a los vectores . Entonces, haciendo el producto vectorial:

=

Encontramos el vector director de L.

Además, se necesita un punto perteneciente a L, un punto que pertenezca a los dos planos simultáneamente. Dando un valor arbitrario a una de las variables x, y , z, y resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, es posible determinar las coordenadas de dicho punto.

Observación: si los planos son paralelos, puede ocurrir que sean o no coincidentes, si son coincidentes la intersección es el mismo plano.

Ejemplo 4: Dados los planos y , de ser posible, hallar la intersección entre ellos.

⊥ = (4 , 2 , 0) ⊥ = (3 , -1 , 4)

// : los vectores directores no son paralelos, entonces los planos no son paralelos, se intersectan en un recta.

= = = 8 – 16 -10 ⇒ = (8 , -16 , -10) // recta

Para hallar un punto que pertenece a la recta:

Se le asigna un valor a una de las variables: z = 2

se reduce a un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Aplicando el método de sustitución: y de (2):

Reemplazamos en (1) :

4x + 6x + 8 – 8 = 0 10 x = 0 ⇒ x = 0

y = 3 x 0 + 4 ⇒ y = 4

P(0, 4 , 2) ∈ recta

Ecuación de la recta L = ∩ .

L : (x , y , z) = (0 , 4 , 2) + t (8 , -16 , -10)

**Intersección de rectas**

Dos rectas en el espacio, si son coplanares y no son paralelas, se cortan en un punto. Como en esa situación, dicho punto pertenece a ambas rectas, sus coordenadas satisfacen las ecuaciones de ambas. Así que, para determinar las coordenadas del punto en el que se intersectan, se debe resolver el sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas que se obtiene igualando las respectivas ecuaciones de recta.

Sean las rectas y , de vectores directores // y //

Siendo las correspondientes ecuaciones:

y

El sistema que se debe resolver es:

Para hallar las coordenadas del punto P(x , y , z) = ∩ , resolvemos el sistema de dos ecuaciones en las incógnitas x e y.

Ejemplo 5: Se ser posible, halle el punto de intersección entre las rectas

y P(-7 , 4 , 1) = (1 , 2 , -6)

1°) Verificamos si son coplanares:

= P1( 1 , 5 , -2) = (1 , 2 , -6) P2 (-7 , 4 , 1) = (-8 , -1 , 3)

= (6 - 6) 2 – (3 – 48) (-1) + (-1 +16) 3 = 0 ⇒ r y s son coplanares.

2°) Se verifica si son paralelas: // : los vectores no son paralelos, entonces las rectas no son paralelas, se intersectan en un punto.

y

Se debe resolver el siguiente sistema:

(3)

Resolvemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

Encolumnando las incógnitas, queda:

- t = -8 (1)

(2)

Por sustitución, t de (1): t = 2+ 8

Reemplazando en (2) :

⇒

t = 2 x (-3) + 8 t = 2

Reemplazando y t en (3):

-11 = -11

Usando la ecuación de una de las dos rectas:

P = ∩ , P(-5 , 8 , -11)

O bien

t = 2

Ejemplo 6: De ser posible, halle la intersección de las rectas: y

b: (x , y , z) = (3 , -1 , 0) + t ( -1 , 2 , 3). Queda a cargo del lector.

Vemos si a // b:

P(-1 , 1 , -1)

b: (x , y , z) = (3 , -1 , 0) + t ( -1 , 2 , 3) Q (3 , -1 , 0)

a y b son rectas no paralelas.

Vemos si son coplanares o alabeadas:

a y b son alabeadas. NO existe punto de intersección.

**Ángulo entre planos**

Sean los planos y

De vectores directores  ⊥ y ⊥

El **ángulo que forman dos planos** es igual al ángulo agudo determinado por los vectores directores de los planos.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Sea el ángulo entre los planos y .  cos =  Con:  cos = |

|  |  |
| --- | --- |
|  | El ángulo entre dos planos es el menor de los ángulos entre ellos, en el ejemplo del gráfico, el ángulo entre planos es 47°. |

Ejemplo 7: Determine el ángulo que forman entre sí los planos π : x - 2y + 3z + 1 = 0 y

α : 4x + y + z -5 = 0

π ⊥ = (1 , - 2 , 3) α ⊥ = (4 , 1 , 1)

cos =

. = 1 . 4 + (-2) . 1 + 3 . 1 = 5 ⇒

=

cos = = arc cos ≅ 71° 38´ 27,5”

El ángulo entre los planos π y α es ≅ 71° 38´ 27,5”

**Ángulo entre rectas**

Dadas dos rectas , sus vectores asociados y , respectivamente.

El **ángulo que forman dos rectas** es igual al ángulo agudo determinado por los vectores directores de las rectas.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Sea α el ángulo entre las rectas y .  Coincide con el ángulo entre y .  cos = |

Ejemplo 8: Determine el ángulo que forman entre sí las rectas ,

t // = (3 , -2 , 5) y l // = (1 , 2 , 4)

cos =

. = 3 . 1 + (-2) . 2 + 5 . 4 = 19 ⇒

=

cos = = arc cos ≅ 47° 43´ 57,04”

El ángulo entre las rectas r y l es ≅ 47° 43´ 57,04”

**Ángulo entre recta y plano**

Sea el plano π, con vector director = (a , b , c) y la recta r con vector director

|  |  |
| --- | --- |
|  | El ángulo que forman la recta y el plano puede obtenerse como:  Siendo el ángulo entre y  cos = Además, como y son ángulos complementarios: cos = sen  sen = |

Ejemplo 9: Determine el ángulo que forman entre sí el plano π : x - 2y + 3z + 1 = 0 y la recta

π ⊥ = (1 , -2 , 3) y l // = (1 , 2 , 4)

sen =

. = 1 . 1 + (-2) . 2 + 3 . 4 = 9 ⇒

=

sen = = arc sen ≅ 31° 39´ 39,18”

El ángulo entre la recta l y el plano π es ≅ 31° 39´ 39,18”

**Distancia de un punto a un plano**

|  |  |
| --- | --- |
| Sea el plano π, con ⊥ , P un punto exterior al plano π. La distancia de P a π, d(P , π), es la distancia entre P y Q, siendo Q el pie de la perpendicular trazada desde P a π. |  |

Una forma de calcular d(P , π) es hallar la recta r que pasa por P y que es perpendicular al plano π, después encontrar las coordenadas de Q, siendo Q = π ∩ r, y calcular la distancia entre los puntos P y Q.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Otra forma posible de calcular d(P , π) es hallar un punto A ∈ π y formar . Se tiene que:  d(P , π) = |

Ejemplo 10: Calcule la distancia entre P(2 , 1, 2) y el plano π : x - 2y + 3z + 1 = 0

Primero verificamos si P ∈ π: 2 – 2 . 1 + 3 . 2 + 1 = 7 ≠ 0 P ∉ π

d(P , π) =

Hallamos las coordenadas de un punto A que pertenece al plano π: le damos valores a dos de las variables del plano, x = 1, y = 1, 1 – 2 . 1 + 3z + 1 = 0, de donde z = 0. Entonces A(1 , 1 , 0 ) ∈ π.

Con el punto P y A, tenemos el vector: = (1 , 0 , 2).

El vector normal del plano es = ( 1 , -2 , 3) ⊥ π

d(P , π) = = = 1,87 u

= ( 1 , -2 , 3) ⊥ π // π → ⊥ = (1 , 1 , 1/3)

⊥ . = 0 1 . a + (-2).b + 3 c = 0 si a = 1 y b = 1 1 -2 + 3c = 0 c = 1/3

**Distancia entre dos planos paralelos**

Sean los planos paralelos y , con ⊥ ⊥ .

|  |  |
| --- | --- |
|  | La distancia entre dos planos paralelos es la mínima distancia entre ellos.  Dos posibles procedimientos:   1. Consideremos los puntos P y Q, P ∈ y Q ∈ , con Q pie de la perpendicular trazada por P respecto que :   d ( , ) = d (P , Q)   1. Sea A un punto cualquiera de Q ∈   d ( , ) = |

Ejemplo 11: De ser posible, calcule la distancia entre los planos π : x + y - 3z + 1 = 0 y α : 2x + 2y – 6 z + 5 = 0

π ⊥ = (1 , 1 , -3) α ⊥ = (2 , 2 , -6)

Como no se puede hablar de distancia entre planos si los planos no son paralelos, primero controlamos que estos planos sean paralelos:

π // α ⇔ // : ⇒ // ⇒ π // α

Los planos son paralelos, controlemos si son o no coincidentes: tomamos un punto de π, para ello damos valores a dos variables, x = 1, y = 0, 1 + 0 -3z + 1 = 0, z = 2/3. El punto P(1 , 0 , 2/3) ∈ π.

Reemplazamos las coordenadas de P en α: 2 x 1 + 2 x 0 – 6 x (2/3) + 5 = 0, pero 3 ≠ 0. P ∉ α

Los planos son paralelos no coincidentes (si hubieran sido coincidentes, la distancia entre ellos sería 0).

Ya tenemos el punto P(1 , 0 , 2/3) ∈ π, ahora buscamos un punto de α. Dando, por ejemplo, los valores x = 1 , y = 1, tenemos: 2 x 1 + 2 x 1 – 6 z + 5 = 0 de donde z = 3/2. El punto Q(1 , 1 , 3/2) ∈ α.

P(1 , 0 , 2/3) ∈ π Q(1 , 1 , 3/2) ∈ α

d ( , ) = se puede hacer la proyección sobre o sobre , ya que // .

d ( , ) = u

**Distancia de un punto a una recta**

Sea la recta r, con // r, y el punto P. Se define la distancia de P a r, d(P , r) a la distancia entre P y el punto Q, siendo Q el punto de intersección de r y un plano que pasa por P y es perpendicular a r.

|  |  |
| --- | --- |
|  | d ( , r) = d(P , Q)  Sea A un punto cualquiera de r:  d ( , r) = |

Ejemplo 12: Calcule la distancia del punto P(1, 3 , -2) y la recta r

r // = ( 3 , -2 , 5)

Controlamos si el punto P pertenece a la recta r: . P ∉ r ( si P perteneciera a la recta, la distancia sería 0).

Consideramos un punto A que pertenece a la recta: A( 2 , -1 , 1) ∈ r. = (1 , -4 , 3)

d ( , r) =

d ( , r) = = ≅ 2,87

**Distancia entre dos rectas paralelas**

Sean las rectas paralelas r y s, de vectores directores y respectivamente, la distancia entre r y s, d( r , s) es la mínima distancia entre r y s.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Consideremos los puntos P y Q, P ∈ r y Q ∈ s:  d ( r , s) = |

Ejemplo 13: De ser posible, calcule la distancia entre las rectas r : (x , y , z) = (-2 , 3 , 1) + t (-1 , 2 , 1) y s : (x , y , z) = (-1 , 1 , 5) + λ (-3 , 6 , 3)

t = 2 ∈ r: M (-4 , 7 , 3) ∈ r

¿M ∈ s?

(-4 , 7 , 3) = (-1 , 1 , 5) + λ (-3 , 6 , 3) -4 = -1 -3λ λ =1

(-4, 7 , 3) = (-1 , 1 , 5) + (-3λ , 6λ , 3λ)

(-4, 7 , 3) = (-1 -3λ , 1 + 6λ , 5 + 3λ)

7 = 1 + 6λ λ = 1

3 = 5 + 3λ λ = -2/3

M ∉ s

r // = (-1 , 2 , 1) y s // = (-3 , 6 , 3)

Si las rectas son coplanares, no se puede hablar de distancia entre ellas si dichas rectas no son paralelas, primero controlamos si las rectas r y s son paralelas:

r // s ⇔ // : ⇒ // ⇒ r // s (recordemos que rectas paralelas son coplanares).

Las rectas son paralelas, controlemos si son o no coincidentes: tomamos un punto de r, por ejemplo, el punto P(-2 , 3 , 1) ∈ r. Reemplazamos las coordenadas de P en s: (-2 , 3 , 1) = (-1 , 1 , 5) + λ (-3 , 6 , 3) y calculamos el correspondiente valor del parámetro λ. En x tenemos -2 = -1 -3 λ, de donde λ = 1/3. En y tenemos, 3 = 1 + 6 λ, de donde λ = 1/3 . Y, en z, tenemos 1 = 5 + 3λ, de donde λ = -4/3, Si p perteneciera a la recta s, los tres valores hallados para λ tendrían que haber sido iguales, pero no lo son. P ∉ s.

Las rectas son paralelas no coincidentes (si hubieran sido coincidentes, la distancia entre ellas sería 0).

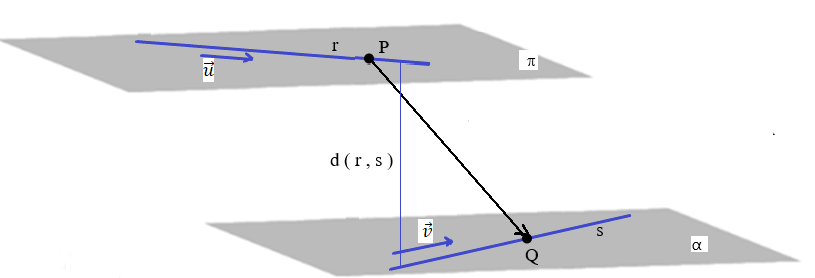
Consideremos el punto P(-2 , 3 , 1) ∈ r y el punto Q (-1 , 1 , 5) ∈ s, armamos ( 1 , -2 , 4) ( se puede tomar el vector o el vector )

d ( r , s) = se puede proyectar sobre o sobre , // .

d ( r , s) =

**Distancia entre dos rectas alabeadas**

Dadas las rectas alabeadas r y s, r // , s // , es posible hallar un único par de planos π y α, paralelos, que contienen a r y a s, respectivamente. π y α tienen por vector normal = x . Se define entonces la distancia entre las rectas r y s, como la distancia entre los planos que las contienen: d( r , s) = d (π , α).



Consideremos los puntos P y Q, P ∈ r y Q ∈ s:

d ( r , s ) =

Ejemplo 14: De ser posible, calcule la distancia entre las rectas

y

La información que se tiene es:

Recta r: P (-2 , 7 , 2 ) ∈ r = (1 , 4 , -1) // r

Recta s: Q(1 , 0 , 4 ) ∈ s = (1 , -3 , 5) // s

Observando los vectores directores, evidentemente r y s no son paralelas, aun así, podrían ser coplanares.

Haciendo el producto mixto: x ) y siendo = (3 , -7 , 2)

x ) = = (20 – 3) 3 – (5 +1) (-7) + (-3 – 4) 2 = 69 ≠ 0 ⇒ r y s no son coplanares. Las rectas r y s son alabeadas.

Entonces existen planos paralelos que las contienen, con vector director .

= x = = 17 – 6 – 7 ⇒ = (17 , - 6 , -7)

d ( r , s ) =

u

d ( r , s ) = = 4,08